ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE GÉOLOGIE APPLIQUÉE
ET DE PROSPECTION MINIÈRE DE NANCY

CONCOURS 1982 — ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

L'attention des candidats est attirée sur le fait qu'il sera tenu le grand compte du soin apporté à la rédaction de la copie, à la présentation générale du devoir, ainsi qu'aux justifications des calculs effectués.

Les parties II et III peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre ; un candidat qui n'aurait su démontrer un résultat, pourra, en l'indiquant explicitement, utiliser ce résultat.

PROBABILITÉS

I - Des véhicules se présentent à un poste de péage de manière aléatoire. On suppose successivement que :

1) La probabilité qu'il se présente n véhicules dans l'intervalle de temps $[t_o, t_o + t]$, où t est un réel positif, ne dépend que de n et de t (à l'exclusion de t_o) et on la désigne par P (n, t).

De plus, on pose P (0, 0) = 1 et P (0, 1) = α, α désignant un réel strictement compris entre 0 et 1, et enfin, pour $n \geq 1$, P (n, 0) = 0.

2) Pour h strictement positif, voisin de zéro, la probabilité d'arrivée de plus d'un véhicule dans l'intervalle de temps $[t_o, t_o + h]$ est négligeable devant la probabilité d'arrivée d'un véhicule, c'est-à-dire que :

$$\lim_{\substack{h \to o \\ h > o}} \left(\frac{\sum_{n=2}^{\infty} P(n, h)}{P(1, h)} \right) = 0$$

3) Quels que soient les entiers naturels m et n et les réels t_0, t_1, t_2, t_3 tels que $t_0 < t_1 \leq t_2 < t_3$, les deux événements suivants sont indépendants :
- "il se présente m véhicules dans l'intervalle $[t_0, t_1]$".
- "il se présente n véhicules dans l'intervalle $[t_2, t_3]$".

INDISPONIBILITÉS

1° - Pour tout $t \geq 0$ on pose P(o, t) = f(t).

a) Montrer que, quels que soient les réels positifs t et u, on a : f (t + u) = f(t) f(u). En déduire que $f(r) = \alpha^r$ pour tout rationnel positif r.

b) Préciser le sens de variation de f sur $\mathbb{R}_+$ et montrer que, pour tout t réel, positif ou nul, $f(t) = \alpha^t$ (pour t irrationnel on pourra utiliser les suites des valeurs décimales approchées à 10^{-n} près).

2° - a) Déterminer la limite de $\frac{1}{t} P(1, t)$ lorsque t tend vers zéro par valeurs positives.

b) Montrer que, pour $n \geq 2$, $\frac{1}{t} P(n, t)$ a pour limite 0 lorsque t tend vers zéro par valeurs positives (n étant fixé).

3° - Pour n entier naturel et t réel, positif ou nul, on pose :

$$g_n(t) = P(n, t)$$

a) Montrer que, pour $n \geq 1$ et t et h réels et positifs, on a :

$$g_n(t+h) = \sum_{i=0}^{n} g_{n-i}(t)\, g_i(h)$$

b) En déduire que g est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}_+$. Etudier la continuité à gauche en tout point de $\mathbb{R}_+$ et la continuité de g_n sur $\mathbb{R}_+$.

c) Prouver que g_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et exprimer $g'_n(t)$ en fonction de α, $g_n(t)$ et $g_{n-1}(t)$.

4° - Calculer $g_1(t)$ et $g_2(t)$. En déduire, par récurrence, l'expression de $g_n(t)$ à l'aide de α et de t.

******

II - On suppose désormais qu'il existe un réel strictement positif et fixe λ tel que : $P(n,t) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$ et que la durée des opérations de péage pour un véhicule est constante et égale à 1 (unité de temps). On suppose également que le poste de péage n'a qu'un guichet, qu'aucun véhicule n'est en attente à l'instant t = 0 et que le premier véhicule arrive à un instant $t_1 > 0$.

A_n est la variable aléatoire qui prend pour valeurs le nombre de véhicules en attente au moment où le n -ième véhicule vient de quitter le péage.

1°- Exprimer, quel que soit $n \geq 1$, les probabilités conditionnelles $p(A_{n+1} = j / A_n = k)$ à l'aide de λ et des entiers naturels j et k.

2°- Démontrer que, quels que soient $n \geq 1$ et $j \geq 0$,

$$p(A_{n+1} = j) = \frac{\lambda^j}{j!} p(A_n = 0) + \sum_{k=1}^{j+1} \frac{\lambda^{j-k+1}}{(j-k+1)!} p(A_n = k)$$

3°- Expliciter en fonction de λ et de l'entier j les probabilités $p(A_1 = j)$ et $p(A_2 = j)$ ainsi que les espérances mathématiques des variables aléatoires A_1 et A_2.

4°- Exprimer à l'aide de λ et de l'entier naturel k, les valeurs prises par l'espérance conditionnelle $E(A_{n+1}/A_n = k)$.

5°- On désigne par I_n la variable aléatoire qui prend la valeur 0 lorsque $A_n = 0$, et la valeur 1 lorsque A_n prend une valeur $k > 0$ (I_n est la variable indicatrice de l'événement $(An > 0)$).

On pose $Y = \lambda + A_n - I_n$.

a) En supposant l'existence de $E(A_n)$ et en utilisant II 4°, montrer que $E(Y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=k-1}^{\infty} j \; p(A_{n+1} = j/A_n = k)\, p(A_n = k)$

b) En admettant qu'on puisse intervertir l'ordre des sommations dans l'expression trouvée au a), montrer qu'on en déduit l'existence de $E(A_{n+1})$ et que $E(A_{n+1}) = E(Y)$.

c) En déduire l'existence de $E(A_n)$ pour tout entier $n \geq 1$ et une relation liant $E(A_{n+1})$, $E(A_n)$ et $p(A_n = 0)$.

6°- Démontrer que, dans le cas où $\lambda > 1$, $\lim_{n \to +\infty} E(A_n) = +\infty$.

==========

III - On conserve les hypothèses du II.

q(t) est la probabilité de l'événement L(t) : "tous les véhicules qui se sont présentés pendant l'intervalle de temps $[0,t]$ ont trouvé le poste de péage libre."

1°- Exprimer q(t) en fonction de λ et de t pour tout t appartenant à l'intervalle $[0,1[$. Calculer q(1). Etudier la continuité de q sur $[0,1]$.

2°- On suppose ici que $1 \leq t < 2$

Pour $0 < h < 1$, on désigne par M (t,h) l'événement :

"Il est arrivé un unique véhicule dans l'intervalle de temps $[t,t+h]$",

et par N (t,h) la conjonction des événements L (t+h) et M (t,h).

a) Montrer que la probabilité $\pi(t,h)$ de l'événement N(t,h) est comprise entre les deux produits :

$q(t-1)\, P(0,1)\, P(1,h)$ et $q(t+h-1)\, P(0,1-h)\, P(1,h)$

En déduire un équivalent de $\pi(t,h)$ au voisinage de h = 0, t étant fixé. (c'est-à-dire lorsque, t étant fixé, h tend vers zéro par valeurs positives).

b) Exprimer q (t+h) en fonction de q (t) et de $\pi(t,h)$.

Montrer que q est dérivable à droite en t.

c) Faire une étude analogue pour $-1 < h < 0$. et montrer que q est dérivable sur l'intervalle $[1,2[$ et que $q'(t) = -\lambda\, q(t) + \lambda e^{-\lambda}\, q(t-1)$.

d) Exprimer q(t) pour $t \in [1, 2[$.

3°- Démontrer que, pour tout entier naturel n et pour tout t de l'intervalle $[n, n+1[$, on a

$$q(t) = e^{-\lambda t} \left[\left(\sum_{k=0}^{n+1} \frac{\lambda^k}{k!} (t+1-k)^k \right) \right].$$

1207-1

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail